

RUOTE DENTATE E ROTISMI

SOMMARIO

- 1 - Ruote di frizione.
- 2 - Le ruote dentate piane ad evolvente.
- 3 - Le ruote piane a denti elicoidali.
- 4 - Le ruote coniche.
- 5 - Vite senza fine e ruota a denti elicoidali
- 6 - Rotismi ordinari.
- 7 - Rotismi epicicloidali.
- 8.- Applicazioni.

Le **ruote dentate**, siano esse piane o coniche, con qualunque tipo di dentatura siano state costruite, rappresentano, insieme alle corrispondenti ruote di frizione, la soluzione al problema della trasmissione del moto fra una coppia di assi, rispettivamente paralleli o concorrenti in un punto, e con un **rapporto di trasmissione costante**. Quando si vuole che tale rapporto di trasmissione si abbia fra assi sghembi ortogonali, il meccanismo è costituito generalmente da una vite senza fine ed una ruota dentata a dentatura elicoidale.

§ 1.- Ruote di frizione.

Consideriamo due membri (A) e (B) costituiti da due ruote di raggio r_1 ed r_2 (fig.1) vincolate rispettivamente alle coppie rotoidali O_1 ed O_2 i cui assi siano paralleli. Se nel punto di contatto C sussistono le condizioni adatte affinché nel moto relativo non vi sia strisciamento, tale moto relativo fra (A) e (B) è un moto di puro rotolamento di cui C è proprio il centro e di cui le circonferenze, traccia delle due ruote sul piano del moto, sono le primitive.

Un siffatto meccanismo costituisce una coppia di **ruote di frizione**; la trasmissione del moto è assicurata esclusivamente dalle condizioni di aderenza che debbono verificarsi nel contatto.

L'analisi cinematica mostra che, se in C il moto relativo è di puro rotolamento, le velocità di C come punto appartenente alla ruota

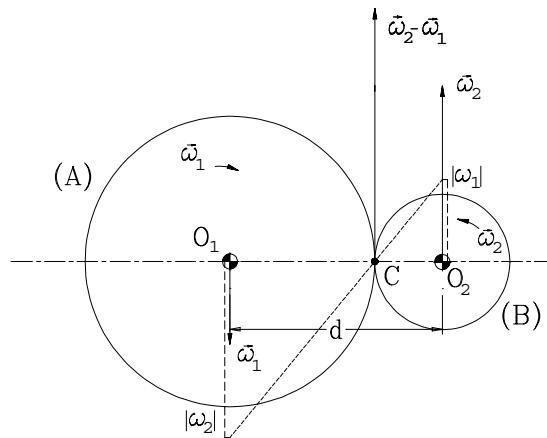


Figura 1

1 oppure alla ruota 2 devono essere le medesime; deve essere quindi:

$$(\vec{v}_C)_{(A)} = (\vec{v}_C)_{(B)} \quad (136)$$

e quindi, indicando rispettivamente con $\bar{\omega}_1$ ed $\bar{\omega}_2$ le velocità angolari della ruota (A) e della ruota (B), sarà:

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

Ne segue che il rapporto di trasmissione del meccanismo è:

$$\tau = \mp \left| \frac{\omega_2}{\omega_1} \right| = \mp \frac{r_1}{r_2} \quad (137)$$

ed è costante.

I versi delle velocità angolari di (A) e di (B) sono discordi se i membri (A) e (B) sono disposti come in fig.1 e quindi nella (137) vale il segno meno; sono invece concordi, e varrà quindi il segno più, quando i membri (A) e (B) sono disposti come in fig.2 che rappresenta il caso in cui una delle due ruote sia una ruota anulare, con contatto, cioè, interno.

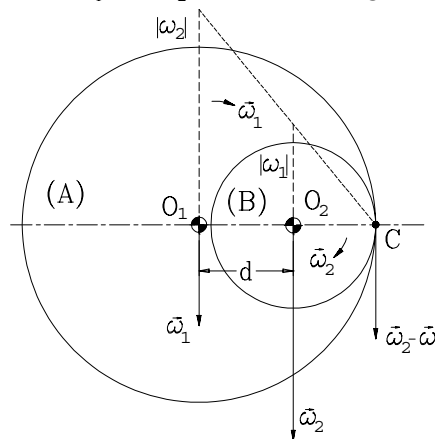
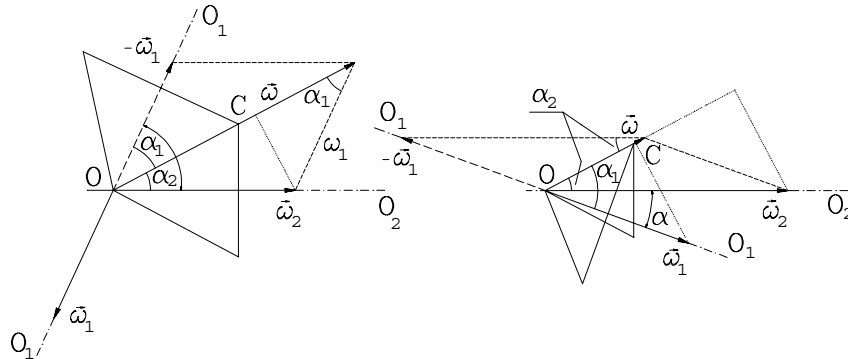


Figura 2

Quando la realizzazione di un rapporto di trasmissione costante deve essere realizzato fra assi concorrenti in un punto le superfici a contatto sono quelle di due coni a sezione circolare, (A) e (B), tangenti lungo una generatrice (fig.3), i cui assi di rotazione coincidono con gli assi dei coni e formano fra loro un angolo $\alpha = \text{cost}$. Indicando rispettivamente con α_1 ed α_2 le semiaperture dei due coni, si ha che la condizione di ro-

**Figura 3**

tolamento senza strisciamento nel moto relativo è che per tutti i punti della generatrice di contatto sia:

$$\bar{\omega}_1 \wedge (C - O) = \bar{\omega}_2 \wedge (C - O) \quad (138)$$

ossia:

$$\bar{\omega}_1 OC \sin \alpha_1 = \bar{\omega}_2 OC \sin \alpha_2$$

Ne segue che il rapporto di trasmissione del meccanismo è:

$$\tau = \mp \left| \frac{\omega_2}{\omega_1} \right| = \mp \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \quad (139)$$

ed è anch'esso costante.

L'effettiva utilizzazione delle ruote di frizione come meccanismi atti a realizzare un rapporto di trasmissione costante è confinato al campo della trasmissione di piccole potenze (coppie basse e basse velocità); si comprende che la condizione di strisciamento nullo nel contatto è realizzabile solo in presenza di un adeguato carico normale sufficiente a generare la forza tangenziale d'attrito necessaria al funzionamento: tale carico normale non potrà essere troppo elevato per non generare deformazioni locali nel contatto ed elevate perdite per attrito nei perni delle coppie rotoidali.

Le deformazioni del contatto d'altra parte renderebbero falsa la condizione che le primitive del moto siano le due circonferenze, nel caso di ruote piane, o i due coni, nel caso di assi concorrenti, che assicuravano il rapporto di trasmissione costante desiderato. In generale il rapporto di trasmissione diventerebbe una funzione delle forze normali che i due membri si scambiano.

§ 2.- Le ruote dentate piane ad evolvente.

Quando sono in gioco potenze notevoli è conveniente che la trasmissione del moto sia affidata, non all'aderenza, ma all'azione mutua che si scambiano opportune superfici coniugate ricavate sulla periferia di un disco, superfici che costituiscono la sagoma dei denti di una ruota dentata (fig.4).

Tali superfici coniugate sono ottenute cinematicamente a partire da due primitive circolari di raggio r_1 ed r_2 di modo che, nel moto relativo, (come nel caso delle ruote di frizione piane) si realizzi il desiderato rapporto di trasmissione fra i due membri che sarà, quindi, ancora costante ed esprimibile con la (137).

Il loro profilo sul piano del moto è quello di una evolvente di cerchio (traiettoria di un punto generico di una retta che rotola senza strisciare su una circonferenza) e i due tratti di evolvente che costituiscono la sagoma del dente si svolgono parte internamente e parte esternamente alla circonferenza primitiva.

Il contatto fra i profili durante il moto avviene lungo la retta g inclinata di un angolo costante ϑ rispetto alla tangente comune alle primitive, ε . **La retta g pertanto costituisce anche la normale comune ai due profili nel loro punto di contatto** e quindi anche luogo esclusivo dei punti di contatto fra i profili dei denti.

Retta g ed angolo ϑ prendono anche il nome di *retta di pressione* ed *angolo di pressione* (fig.5); in assenza di attrito, infatti, la retta g coincide con la retta di applicazione della forza mutua che si scambiano i denti in presa. Il valore dell'angolo di pressione, ormai gene-

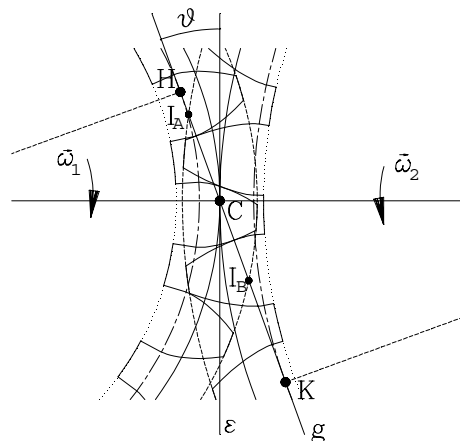


Figura 4

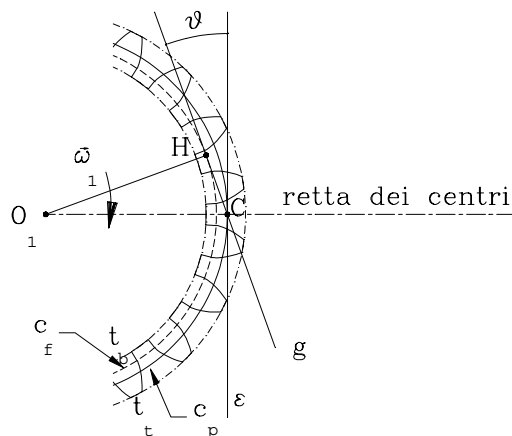


Figura 5

ralmente adottato, è $\vartheta=20^\circ$.

La retta g risulta anche tangente, in H e K , ad altre due circonferenze $(c_f)_1$ e $(c_f)_2$, di raggi rispettivamente $r_1 \cos \theta$ ed $r_2 \cos \theta$, concentriche con le corrispondenti primitive, che prendono il nome di *circonferenze fondamentali*. Sono queste le circonferenze su cui la retta g rotola senza strisciare per la generazione delle evolventi che costituiscono il profilo dei denti.

Non sarà quindi possibile avere tratti di evolvente interni alle circonferenze fondamentali.

Per le ruote dentate vale la seguente nomenclatura:
- la congiungente i centri delle coppie rotoidali, O_1 , O_2 prende il nome di *retta dei centri* (fig.5);

- la fase in cui i denti

si toccano prima dell'attraversamento della retta dei centri si dice *fase di accesso*, la successiva, *fase di recesso*;

- nelle ruote esterne (fig.6) la parte del profilo del dente interna alla primitiva prende il nome di *fianco* del dente, la parte esterna prende il nome di *costa* del dente; nelle ruote anulari è il viceversa;

- *troncature* si chiamano le circonferenze ideali (fig.5) secondo le quali è delimitato il dente in altezza; la troncatura *di testa*, t_t , delimita i denti verso l'esterno, la troncatura *di base* (o interna), t_b , delimita i denti internamente alla primitiva;

- la differenza fra i raggi della troncatura di testa e della primitiva prende il nome di *addendum* (fig.6); la differenza fra i raggi della primitiva e della troncatura di base prende il nome di *dedendum*; la somma dell'addendum e del dedendum misura l'*altezza del dente*;

- la lunghezza dell'arco di primitiva compreso fra due profili omologhi (o fra due assi di simmetria del dente) successivi prende il nome di *passo* della dentatura (fig.6); la lunghezza dell'arco di primitiva compreso fra i due profili che costituiscono il dente prende il nome di *groschezza* del dente;

- la differenza fra passo e groschezza è l'ampiezza del *vano* fra due denti; la lunghezza dell'arco di primitiva corrispondente alla rotazione durante la quale due denti sono in presa prende il nome di *arco d'azione* (fig.7); affinché i due denti successivi siano in presa prima che i precedenti si abbandonino l'arco d'azione deve essere maggiore o al limite uguale al

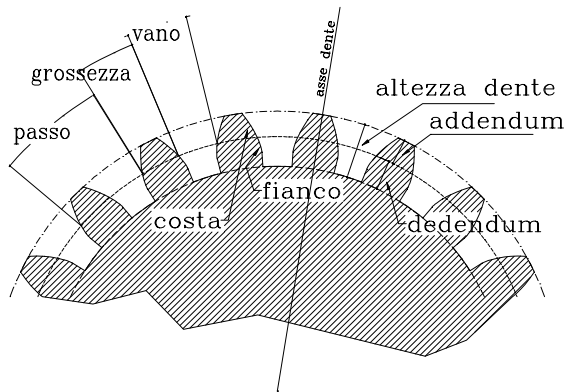


Figura 6

passo.

Affinché due ruote ingranino correttamente devono avere lo stesso passo, p , ed affinché il loro funzionamento sia invertibile i denti devono presentare profili simmetrici rispetto ad un raggio che sarà quindi l'asse del dente. Inoltre, perché le ruote possano funzionare correttamente almeno per una rotazione completa, il numero dei denti, z , deve essere intero.

Ora se p è il passo della dentatura, comune a due ruote ingrananti fra loro, le relazioni che legano il numero dei denti alla lunghezza della circonferenza primitiva di ciascuna di esse saranno:

$$2\pi r_1 = pz_1 \qquad 2\pi r_2 = pz_2 \qquad (140)$$

da cui:

$$\frac{p}{\pi} = m = \frac{2r_1}{z_1} = \frac{2r_2}{z_2} \qquad (141)$$

Da questa relazione si ricava che il rapporto di trasmissione ottenibile attraverso una coppia di ruote dentate è immediatamente deducibile dal rapporto fra il numero dei denti. Infatti, confrontando con la (137), si ha:

$$\tau = \mp \left| \frac{\omega_2}{\omega_1} \right| = \mp \frac{r_1}{r_2} = \mp \frac{z_1}{z_2} \qquad (142)$$

Il rapporto $m=p/\pi$ che compare nella (141) prende il nome di *modulo* della dentatura (o anche passo diametrale) e si comprende che se, come si è detto, due ruote ingrananti fra loro devono avere lo stesso passo, ciò equivale a dire che dovranno avere anche lo stesso modulo.

Per il modulo, che fissa, in pratica, il rapporto fra il diametro di primitiva di una ruota ed il numero dei suoi denti, si conviene di adottare generalmente numeri interi; solo per dentature piccole si adottano numeri frazionari.

I valori normalmente usati, secondo le norme di unificazione variano: di 0,1 per valori compresi fra 0,5 e 1; di 0,25 per valori compresi fra 1 e 4; di 0,5 per valori compresi fra 4 e 7; di 1 per valori compresi fra 7 e 12;

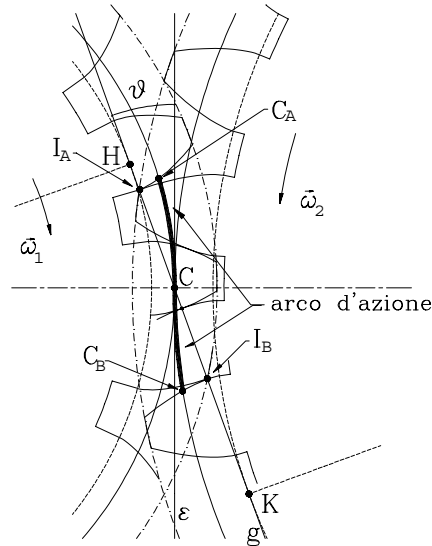


Figura 7

di 2 per valori compresi fra 12 e 24; di 3 per valori compresi fra 24 e 45; di 5 per valori compresi fra 45 e 75.

Il valore del modulo ha un ruolo fondamentale nel proporzionamento della ruota (*proporzionamento modulare*) e per questo viene comunemente indicato in mm: si fa l'addendum pari ad m , ed il dedendum pari a $(7/6)m$; l'altezza del dente risulterà pertanto pari a $(13/6)m$. Quando il dedendum ha un valore tale per cui il fianco del dente si estende fino all'interno della circonferenza fondamentale, il tratto del fianco compreso fra la fondamentale e la troncatura di base è radiale di modo che, nel punto di attraversamento, il profilo del fianco del dente abbia la medesima tangente.

Dalla (141) risulta che il diametro della primitiva di una ruota risulta $2r = mz$, e, aggiungendo due volte l'addendum, il diametro del disco su cui intagliare i denti (diametro della circonferenza di troncatura di testa) risulta $m(z+2)$. A parità di numero di denti, quindi, a moduli piccoli corrisponderanno ruote piccole, a moduli grandi ruote grandi.

Tuttavia, la scelta del valore da scegliere per il modulo di una dentatura ha un ulteriore risvolto: fissato i diametri delle primitive, il modulo determina il diametro delle circonferenze di troncatura di testa e di conseguenza, sulla retta g (fig.7) i punti I_A ed I_B in cui avverrà il primo contatto, in fase di accesso, (I_A), fra il fianco di un dente della ruota conduttrice e l'estremità della costa di un dente della ruota condotta, e l'ultimo contatto, in fase di recesso, (I_B), fra l'estremità della costa del dente della ruota conduttrice ed un punto del fianco del dente della ruota condotta. Si comprende allora che maggiore è il modulo scelto per la dentatura tanto più lontano dal centro C si troveranno i punti I_A ed I_B e tanto maggiore, di conseguenza la velocità di strisciamento (velocità relativa) fra i profili, e tanto maggiore, quindi, la potenza perduta nell'imbocco.

Una caratteristica delle ruote dentate con profilatura ad evolvente è quella che il loro funzionamento risulta cinematicamente esatto anche se l'interasse di progetto, d , non viene esattamente rispettato (fig.8), ovvero se, entro certi limiti, esso viene volutamente alterato.

Se, infatti, l'interasse passa dal valore d al valore $d(1+\alpha)$, i raggi delle primitive diventano $r_1(1+\alpha)$ ed $r_2(1+\alpha)$; i denti, tuttavia, in quanto costruiti sulla base delle fondamentali originarie, saranno ancora

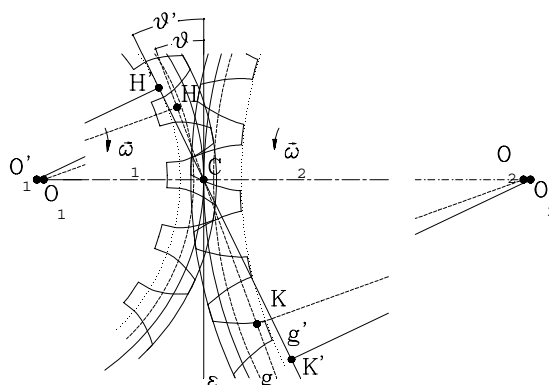


Figura 8

rie, saranno ancora profili coniugati anche se le primitive risultano ampliate. Cambia invece l'angolo di pressione in quanto la retta g , dovendosi ancora appoggiare alle fondamentali, i cui centri sono diventati O_1' ed O_2' , assumerà la posizione della g' il cui angolo rispetto alla tangente comune alle primitive sarà $\vartheta' > \vartheta$.

Il rapporto di trasmissione fra due ruote il cui interasse sia stato maggiorato non cambia. Sarà infatti:

$$\tau = \frac{O_1' C}{O_2' C} = \frac{r_1 \cos \vartheta}{\cos \vartheta'} \cdot \frac{r_2 \cos \vartheta}{\cos \vartheta'} = \frac{r_1}{r_2} \quad (143)$$

La ruota limite, ossia quella di raggio massimo, è la dentiera (o cremagliera) (fig.9). La forma del dente della dentiera è rettilineo.

Da quanto sopra detto segue che un gruppo di ruote di diverso diametro, purché costruite con lo stesso angolo di pressione θ e con lo stesso modulo, possono correttamente ingranare fra loro realizzando i rapporti di trasmissione che derivano dal rapporto fra il loro numero dei denti. Un siffatto gruppo di ruote costituisce una *serie*: la ruota più piccola prende il nome di *rocchetto*, la più grande sarà la *cremagliera*.

Tuttavia la realizzazione di una serie pone una limitazione alla scelta del valore del modulo (e di conseguenza al proporzionamento dei denti): poiché i contatti fra i profili avvengono sulla retta g e poiché, al contempo, non esiste alcun tratto di evolvente all'interno delle circonferenze fondamentali, l'estensione della costa del dente, e quindi la troncatura di testa, non possono superare i punti H e K . Pertanto fissato il diametro del rocchetto sarà (fig.9) la troncatura di testa della cremagliera, passando per H , a fissare, il valore massimo del modulo con cui possono essere realizzate le ruote della serie affinché le condizioni suddette siano rispettate. Sarà quindi:

$$m_{\max} = r_1 \operatorname{sen}^2 \vartheta \quad (144)$$

Conseguentemente si desume il minimo numero di denti che è possibile assegnare al rocchetto, e che sarà:

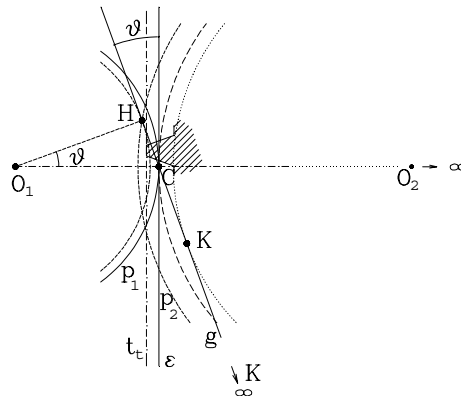


Figura 9

$$z_{\min} = \frac{2r_1}{m_{\max}} = \frac{2r_1}{r_1 \sin^2 \vartheta} = \frac{2}{\sin^2 \vartheta} \quad (145)$$

Dalla (144) e dalla (145) si osserva che, per dato ϑ , mentre il valore del modulo massimo dipende dal diametro prescelto per il rocchetto, il numero minimo di denti che gli si può assegnare dipende esclusivamente dall'angolo di pressione.

Con l'usuale valore di $\vartheta=20^\circ$ si avrà $m_{\max}=0,11r_1$ e quindi $z_{\min}=18$.

La forza mutua che si scambiano i denti ha come retta d'azione la retta g , ed è costante se la coppia è costante.

Per l'equilibrio della ruota dovrà essere:

$$C_m = F_n r \cos \vartheta \quad (146)$$

da cui:

$$F_n = \frac{C_m}{r \cos \vartheta} \quad (147)$$

Si vede quindi che, a parità di coppia motrice e a parità di diametro di primitiva, il valore dell'angolo di pressione influenza direttamente l'entità della forza mutua che si scambiano i denti in presa: maggiore è il valore di ϑ e maggiore sarà il valore di F_n ; e ciò spiega come il valore dell'angolo di pressione che si utilizza sia poco elevato.

Si faccia caso anche alla circostanza che ad un maggior valore dell'angolo di pressione, corrisponderebbe inevitabilmente un aggravio del carico sulle coppie rotoidali delle due ruote.

§ 3.- Le ruote cilindriche a denti elicoidali.

Le ruote a denti elicoidali rappresentano una variante rispetto alle ruote a denti dritti.

Si può immaginare che le ruote piane a denti dritti nascano facendo compiere alla sagoma del dente uno spostamento assiale parallelo all'asse di rotazione della ruota stessa; il dente della ruota cilindrica a denti elicoidali può essere pensato ottenuto facendo compiere alla sagoma del dente uno spostamento elicoidale: una traslazione parallela all'asse di

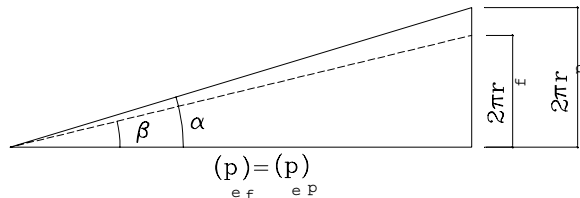


Figura 10

rotazione della ruota ed una contemporanea rotazione intorno allo stesso asse.

Tutti i punti del profilo del dente descrivono, in questo moto delle eliche appartenenti a cilindri coassiali: tra questi, il cilindro primitivo ed il cilindro fondamentale ed, ovviamente quelli corrispondenti alle troncature, di testa e di base.

Le eliche, nascendo dallo stesso moto elicoidale, avranno tutte lo stesso rapporto caratteristico (fig.10) e quindi lo stesso passo p_e ; presenteranno quindi inclinazione diversa a seconda del cilindro cui appartengono. In particolare sarà sul cilindro primitivo:

$$\tan \alpha = \frac{2\pi r_p}{p_e} \quad (148)$$

e sul cilindro fondamentale:

$$\tan \beta = \frac{2\pi r_f}{p_e} = \frac{2\pi r_p \cos \vartheta}{p_e} \quad (149)$$

Dal confronto fra la (148) e la (149) discende la relazione esistente fra gli angoli, α e β , di inclinazione delle due eliche; ossia:

$$\tan \beta = \tan \alpha \cos \vartheta \quad (150)$$

Nelle ruote con asse dente elicoidale si ottiene, proprio in virtù di tale disposizione, (fig.11), un *aumento virtuale dell'arco d'azione*: infatti, durante una rotazione della ruota pari a $\Delta\vartheta$ corrispondente alla durata del contatto fra due denti in presa, il contatto fra i denti si sposta lungo un'elica, da C_a a C_b , portandosi dalla sezione frontale alla sezione posteriore;

la rotazione $\Delta\vartheta$ può pensarsi risultante dalla somma di due rotazioni distinte: una rotazione $\Delta\vartheta'$, relativa alla fase in cui il punto di contatto sulla primitiva passa dal punto C_a al punto C' e corrispondente alla fase del contatto fra una coppia di profili, misurata sulla sezione frontale, (equivalente all'arco d'azione nel caso dei denti diritti), cui occorre aggiungere la rotazione $\Delta\vartheta''$, relativa alla fase in cui il punto di contatto sulla primitiva passa dal punto C' al punto C'' e corrispondente alla fase che

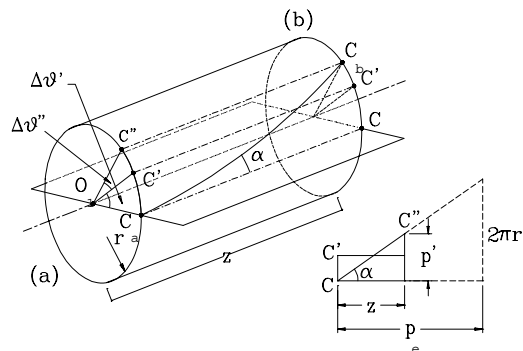


Figura 11

porta fino al termine del contatto fra i denti sulla sezione posteriore che è spostata assialmente rispetto alla prima della lunghezza z del tronco del cilindro.

La rotazione complessiva sarà quindi:

$$\Delta\vartheta = \Delta\vartheta_1 + \Delta\vartheta_2 = \frac{C_a C'}{r} + \frac{C' C''}{r}$$

essendo:

$$C_a C'' = z \tan \alpha$$

I *vantaggi* che si ottengono con tali tipi di ruote sono: la dolcezza di movimento, e quindi una maggiore silenziosità, in quanto il contatto e il distacco fra i denti non si realizza più in modo istantaneo; una maggiore robustezza dei denti, potendo utilizzare moduli minori senza compromettere la continuità della trasmissione, ed ottenendo quindi denti di altezza minore; l'utilizzo di un modulo più piccolo fa sì che diminuiscano anche le velocità massime di strisciamento risultando i contatti più prossimi all'asse della rotazione istantanea.

Affinché due ruote ingranino correttamente devono avere lo stesso passo frontale e lo stesso angolo di inclinazione dell'elica sul cilindro primitivo.

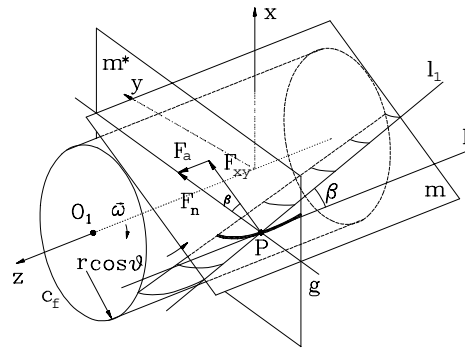


Figura 12

La *normale al contatto* fra i denti (fig.12) in questo caso dovrà essere una retta appartenente ad un piano m inclinato di ϑ rispetto al piano tangente ai due cilindri primitivi ed inclinata di β rispetto alla normale all'asse di rotazione (deve essere, nel contatto, normale all'elica sul cilindro fondamentale).

Pertanto, in assenza di attrito, la forza normale \vec{F}_n che due denti si scambiano avrà le due componenti:

$$\begin{aligned} F_{xy} &= F_n \cos \beta \\ F_z &= F_n \sin \beta \end{aligned} \quad (151)$$

la prima normale all'asse di rotazione, la seconda parallela ad esso; solo la prima delle due ha, quindi, momento rispetto a detto asse, e, per l'equilibrio della ruota, dovrà essere:

biano i denti, immaginando, (fig.13), per semplicità che il contatto avvenga in corrispondenza del punto C, punto della generatrice di contatto di uno dei coni primitivi corrispondente ad una sua sezione di raggio r_m .

Ipotizziamo un riferimento con origine nel punto O, asse z perpendicolare al piano

contenente gli assi del moto delle due ruote, asse x coincidente con l'asse di uno dei coni primitivi, asse y ortogonale ai primi due.

Avremo allora un piano B_0 passante per l'asse z e per la generatrice di contatto OC; un piano m^* passante per OC e tangente ai coni fondamentali, per cui sarà inclinato dell'angolo ϑ rispetto a B_0 ; la OC peraltro forma l'angolo α , semiapertura del cono primitivo, con l'asse y.

La normale al contatto dovrà appartenere al piano m^* e quindi la forza normale che si scambiano i denti avrà le due componenti:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{xy} &= -F_n \operatorname{sen} \vartheta \vec{\mu} \\ \vec{F}_z &= F_n \operatorname{cos} \vartheta \vec{k} \end{aligned} \quad (155)$$

rispettivamente nel piano xy e secondo l'asse z. A sua volta la \vec{F}_{xy} , dovendo essere perpendicolare alla OC avrà le componenti:

$$\begin{aligned} \vec{F}_x &= F_{xy} \operatorname{sen} \alpha \vec{i} = F_n \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \alpha \vec{i} \\ \vec{F}_y &= F_{xy} \operatorname{cos} \alpha \vec{j} = F_n \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{cos} \alpha \vec{j} \end{aligned} \quad (156)$$

Delle tre componenti trovate, solamente la \vec{F}_z ha momento rispetto all'asse della ruota in quanto le altre due giacciono nel piano contenente proprio quest'asse.

Per l'equilibrio della ruota dovrà allora essere:

$$C_m = F_z r_m = F_n r_m \operatorname{cos} \vartheta \quad (157)$$

da cui possiamo ricavare:

$$F_n = \frac{C_m}{r_m \operatorname{cos} \vartheta} \quad (158)$$

Sostituendo la (158) nella seconda delle (155) e nelle (156), le compo-

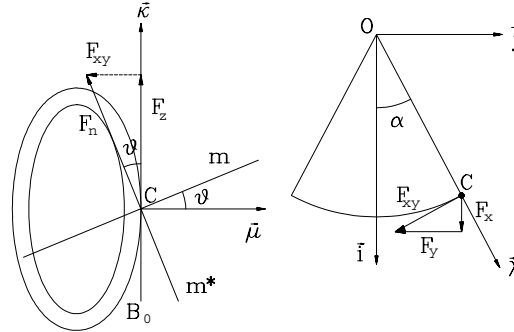


Figura 14

nenti, secondo i tre assi, della forza mutua che si scambiano i denti si possono scrivere come:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{C_m}{r_m} \tan \vartheta \sin \alpha \\ F_y &= \frac{C_m}{r_m} \tan \vartheta \cos \alpha \\ F_z &= \frac{C_m}{r_m} \end{aligned} \quad (159)$$

e si può da queste rilevare, per un verso, l'influenza della geometria della ruota sull'entità delle forze che si scambiano i denti, e, d'altra parte, come tali tipi di ruote necessitano, nel montaggio, di adeguati supporti che reagiscano, durante il funzionamento, a ciascuna delle componenti trovate.

§ 5.- Vite senza fine e ruota a denti elicoidali.

Questo meccanismo consente la realizzazione di un rapporto di trasmissione costante fra assi sghembi, generalmente fra assi sghembi ortogonali.

E' costituito dall'accoppiamento di una vite e da una ruota dentata piana a denti elicoidali.

La vite a filetto trapezoidale (fig.15), è il membro rigido la cui superficie attiva è ottenuta da un elicoide rigato chiuso a cono direttore, ossia dalla superficie generata da una retta, incidente l'asse di rotazione e formante un angolo ϑ ($\approx 15^\circ$) con il piano normale ad esso, in moto elicoidale attorno allo stesso asse (fig16). La superficie attiva dei filetti è quella contenuta fra due cilindri di raggio r_1 ed r_2 .

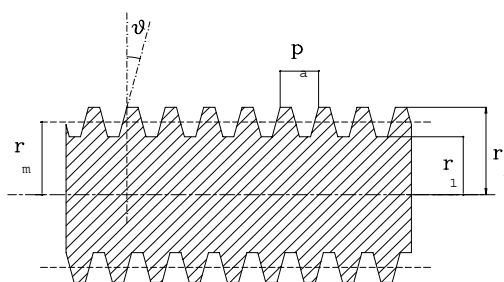


Figura 15

Indicando con α l'inclinazione dell'*elica media* in corrispondenza del raggio medio, r_m , della vite, e con p_e il suo passo, la relazione che lega tali grandezze è data da:

$$\tan \alpha = \frac{p_e}{2\pi r r_m} \quad (160)$$

con:

$$r_m = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

Si definisce ancora *passo assiale*, p_a , della vite l'ampiezza della traslazione che porta una sezione del filetto a coincidere con la successiva; questo può essere diverso dal passo dell'elica media se la vite è a più principi (2 principi in fig.17).

Sarà cioè:

$$p_e = z_1 p_a \quad (161)$$

se con z_1 si indica il numero dei principi della vite.

Il rapporto di trasmissione fra i due membri si può ricavare considerando ciò che accade nel *piano principale* ossia nel piano normale all'asse della ruota e contenente l'asse di rotazione della vite: in tale piano la vite si presenta come una cremagliera (*profilo principale*) che imbrocca con una

ruota piana a denti diritti. Ipotizzando, per semplicità, che il contatto fra i due membri sia in corrispondenza del punto C, in cui la primitiva della ruota, di raggio R, è tangente alla retta che dista di r_m dall'asse di rotazione della vite, si può osservare che la velocità assoluta del punto C, considerato appartenente al filetto della vite, può essere ricavata osservando che, se la vite ruota con velocità angolare ω_1 , essa compirà un giro completo in un certo tempo Δt ; sarà cioè:

$$2\pi = \omega_1 \Delta t \quad (162)$$

Nello stesso tempo Δt , per effetto del moto elicoidale, lo stesso punto C si sarà spostato di p_e con velocità V; ossia:

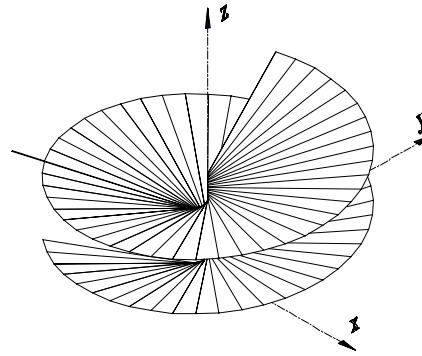


Figura 16

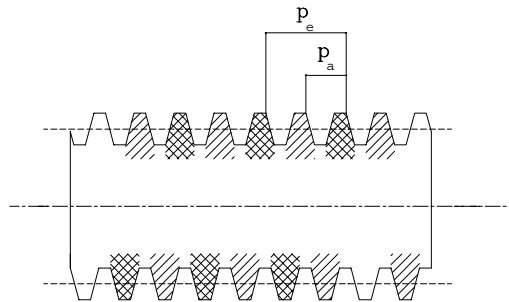


Figura 17

$$p_e = v_C \Delta t \quad (163)$$

Dalle (162) e (163) si ricava allora:

$$\frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{p_e}{v_C}$$

da cui:

$$v_C = \frac{p_e}{2\pi} \omega_1 = \frac{z_1 p_a}{2\pi} \omega_1 \quad (164)$$

La stessa velocità \bar{v}_C deve avere il punto C appartenente alla primitiva della ruota la cui velocità angolare sarà ω_2 ; e deve quindi essere:

$$v_C = \omega_2 R \quad (165)$$

Inoltre, affinché vite e ruota ingranino correttamente, il passo della dentatura della ruota deve essere il medesimo del passo assiale della vite e quindi, nella (165), il valore di R deve essere tale per cui:

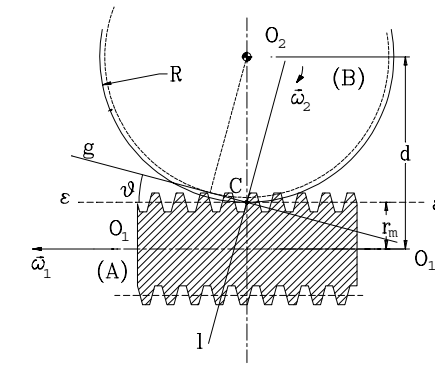


Figura 18

$$z_2 p_a = 2\pi R \quad (166)$$

Sostituendo nella (165) si ha quindi:

$$v_C = \omega_2 \frac{z_2 p_a}{2\pi} \quad (165')$$

da cui, eguagliandola con la (164), si può ricavare il **rapporto di trasmissione**:

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2} \quad (167)$$

Considerando che un accoppiamento del genere non è reversibile, e che l'elemento motore è la vite, si capisce che risulta possibile realizzare rapporti di trasmissione estremamente bassi: con una vite a due principi ($z_1=2$) ed una ruota elicoidale con 40 denti ($z_2=40$), dalla (167) si deduce un rapporto di trasmissione $\tau=1:20$.

Supponendo ancora che il contatto sia in C, cerchiamo ora le componenti della *forza mutua* che i due membri si scambiano durante l'accoppiamento (fig.19).

Restando ancora nel piano principale (yz), osserviamo che dovrà esistere certamente una componente F_{yz} di direzione normale, in C, al profilo principale della vite; essendo questo inclinato dell'angolo ϑ , la relazione fra i suoi componenti lungo gli assi dovrà essere:

$$F_y = F_z \tan \vartheta \quad (168)$$

Tuttavia né la F_y , né la F_z , possono avere momento rispetto all'asse di rotazione della vite, avendo rette d'azione ad esso incidenti; dovrà quindi esistere anche una componente F_x tale che sia, contemporaneamente:

$$F_x = \frac{C_m}{r_m} = F_z \tan \alpha \quad (169)$$

rispettivamente per l'equilibrio della vite, e per dover essere la F_{xz} normale, nel piano (xz), all'elica media che è inclinata di α .

Da quest'ultima si ricava quindi:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{C_m}{r_m} \\ F_z &= \frac{C_m}{r_m} \frac{1}{\tan \alpha} \end{aligned} \quad (170)$$

e infine, sostituendo opportunamente nella (168):

$$F_y = \frac{C_m}{r_m} \frac{\tan \vartheta}{\tan \alpha} \quad (171)$$

ottenendo quindi le tre componenti della forza normale che, in assenza di attrito, il filetto della vite esercita sul dente della ruota, ed il cui modulo vale quindi:

$$F_n = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \frac{C_m}{r_m} \sqrt{1 + \frac{\tan^2 \vartheta}{\tan^2 \alpha} + \frac{1}{\tan^2 \alpha}}$$

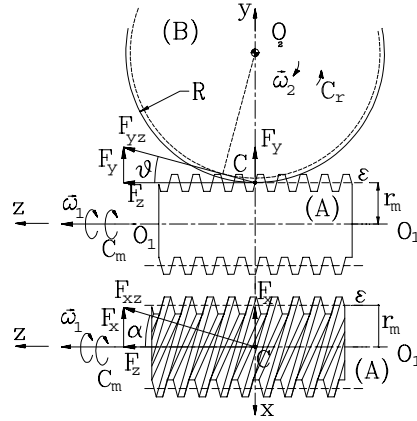


Figura 19

ossia:

$$F_n = \frac{C_m}{r_m \tan \alpha} \sqrt{1 + \tan^2 \alpha + \tan^2 \vartheta} = F_z \sqrt{1 + \tan^2 \alpha + \tan^2 \vartheta} \quad (172)$$

§ 6.- Rotismi ordinari.

Prende il nome generico di *rotismo* un sistema costituito da ruote dentate che ingranano fra loro e disposte in modo tale che la rotazione di una di esse ponga in rotazione tutte le altre.

I rotismi si distinguono fondamentalmente in due categorie: i *rotismi ordinari*, quelli in cui gli assi di rotazione delle ruote siano tutti fissi, ed i *rotismi epicicloidali*, quelli in cui almeno un asse di rotazione è mobile.

Nei rotismi ordinari (fig.20), tra la prima ruota (movente o conduttrice) e l'ultima ruota (cedente o condotta) sono generalmente interposti degli alberi intermedi su ciascuno dei quali sono calettate per lo più due ruote, solidali fra loro: di queste una ingrana con la ruota precedente di cui quindi sarà la cedente, l'altra con la successiva di cui sarà la movente.

Se su un asse intermedio è calettata un'unica ruota che imbocca contemporaneamente con la precedente e con la successiva, questa prende il nome di intermedia o-ziosa (fig.21).

Gli assi delle ruote saranno fra loro tutti paralleli oppure no a seconda del tipo di ruote (piane o coniche) che sono calettate su di essi.

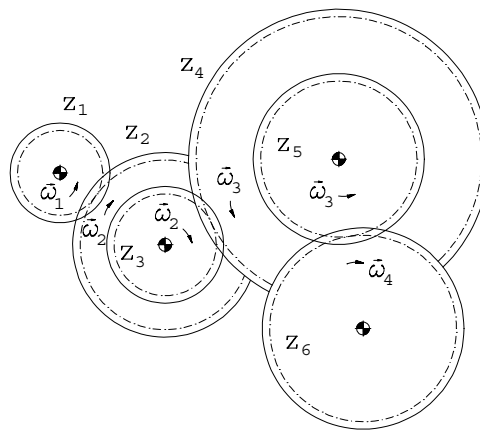


Figura 20

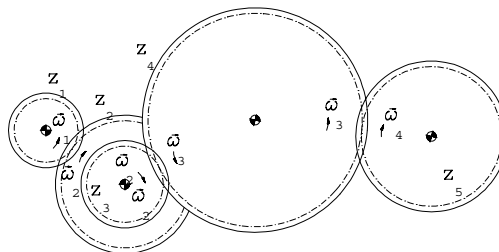


Figura 21

RUOTE DENTATE E ROTISMI

Consideriamo ora un rotismo ordinario costituito da n ruote dentate, disposte secondo lo schema di fig.20, ciascuna delle quali avrà z_i denti; in esso si avranno $n/2$ imbocchi per ciascuno dei quali è definibile un rapporto di trasmissione τ_i .

Con riferimento allo schema, avremo:

$$\tau_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2}; \quad \tau_2 = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{z_3}{z_4}; \quad \tau_3 = \frac{\omega_4}{\omega_3} = \frac{z_5}{z_6}; \quad (173)$$

Il rapporto di trasmissione del rotismo nel suo complesso sarà dato dal prodotto dei rapporti di trasmissione che si hanno nei singoli imbocchi. E' infatti:

$$\tau = \frac{\omega_4}{\omega_1} = \tau_1 \tau_2 \tau_3 = \frac{z_1 z_3 z_5}{z_2 z_4 z_6} \quad (174)$$

Si può allora concludere che il *rapporto di trasmissione di un rotismo ordinario* è dato dal rapporto fra il prodotto del numero dei denti delle ruote conduttrici ed il prodotto del numero dei denti delle ruote condotte.

Dalla stessa (174) si può dedurre anche il *verso di rotazione* dell'ultima ruota: infatti, considerando che in ogni singolo imbocco si avrà $\tau_i < 0$ se l'imbocco è esterno oppure $\tau_i > 0$ se l'imbocco è interno, basterà contare il numero degli imbocchi esterni presenti nel rotismo e concludere che, se sono pari, il verso di rotazione dell'ultima ruota sarà concorde con quello della prima, mentre, se sono dispari, i due versi saranno discordi.

Se applichiamo la (174) al caso dello schema di fig.21, poiché la quarta ruota è contemporaneamente cedente per la terza e movente per la quinta (intermedia oziosa), avremo:

$$\tau = \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{z_1 z_3 z_4}{z_2 z_4 z_5} = \frac{z_1 z_3}{z_2 z_5} \quad (175)$$

ossia che il rapporto di trasmissione risulta indipendente dalla presenza o meno della intermedia oziosa (da qui il nome); la sua interposizione in un rotismo ha solo lo scopo di invertire il verso di rotazione dell'ultima cedente.

Un rotismo si dice *riduttore* se per esso è $\tau < 1$; si dice *moltiplicatore* se risulta $\tau > 1$.

La sua condizione di equilibrio dinamico, in assenza di perdite, è espressa dalla relazione:

$$C_m \omega_1 = C_r \omega_n \quad (176)$$

e quindi possiamo pure scrivere:

$$\tau = \frac{\omega_n}{\omega_1} = \frac{C_m}{C_r} \quad (177)$$

Si vede allora che un rotismo riduttore è un moltiplicatore di coppia ($C_r > C_m$), mentre un rotismo moltiplicatore è un riduttore di coppia ($C_r < C_m$).

Uno dei problemi che trovano soluzione utilizzando i rotismi ordinari è quello di riuscire a realizzare più rapporti di trasmissione utilizzabili selettivamente in modo da adeguare la potenza motrice a differenti valori della coppia resistente, ossia in modo che risulti rispettata la (176); è ciò che si ottiene attraverso un *cambio di velocità*.

Possiamo definire come cambio di velocità un qualsiasi dispositivo atto a fornire alternativamente almeno due diversi rapporti di trasmissione fra un albero di ingresso ed un albero di uscita.

In generale la sua realizzazione pratica è ottenuta per mezzo di ruote dentate, quasi sempre piane, oppure con ruote di frizione, con cinghie e coni di pulegge, con cinghie e pulegge a diametro variabile (variatori continui), o anche con gruppi idraulici.

Nel campo delle ruote dentate piane la realizzazione più semplice si potrebbe avere con uno schema come quello di fig. 22 in cui le ruote z_1 e z'_1 sono calettate sull'albero motore e le ruote z_2 e z'_2 sono montate sull'albero condotto. Quest'ultimo è però un *albero scanalato* e ciò costituisce, per le ruote montate su di esso, un vincolo alla rotazione ma non alla traslazione: si comprende che spostando la coppia di ruote z_2 e z'_2 verso sinistra (come in figura) si ottiene l'imbocco fra z_1 e z_2 , mentre spostandolo verso destra si ottiene l'imbocco fra z'_1 e z'_2 .

Si realizzano così i due rapporti di trasmissione $\tau = z_1/z_2$ e $\tau' = z'_1/z'_2$.

Con tale disposizione, tuttavia, non può aversi la coassialità fra l'albero di ingresso e l'albero di uscita, cosa che invece è spesso auspicabile per motivi di geometria complessiva della macchina.

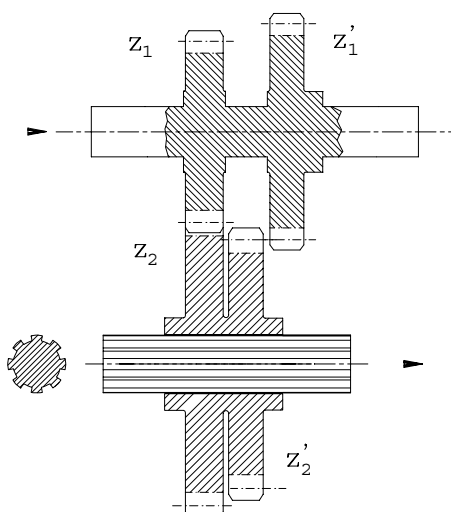


Figura 22

RUOTE DENTATE E ROTISMI

Quando si voglia ottenere la coassialità degli alberi si può ricorrere ad uno schema come quello di fig. 23 che rappresenta un cambio con *contralbero* (o albero secondario) ed una *coppia sempre in presa*; in tale disposizione i diversi rapporti di trasmissione vengono forniti sempre dall'imbocco fra quattro ruote di cui due, z_1 e z_2 nello schema di figura, ingranano costantemente fra loro mentre è possibile cambiare l'imbocco delle altre due.

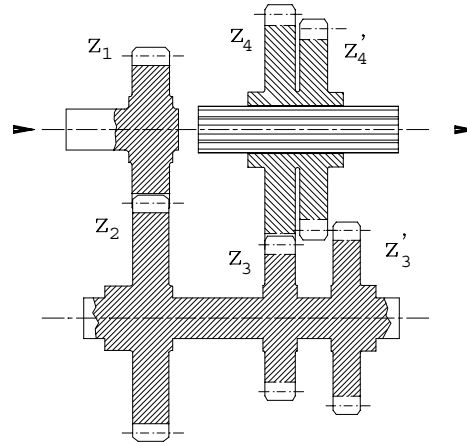


Figura 23

Nello schema, il gruppo di ruote indicate con z_4 e z'_4 può essere spostato sull'albero scanalato o verso sinistra ottenendo l'imbocco fra z_3 e la z_4 , oppure verso destra ottenendo l'imbocco fra la z'_3 e la z'_4 . I rapporti di trasmissione che alternativamente si ottengono sono quindi $\tau = z_1 z_3 / z_2 z_4$ e $\tau' = z_1 z'_3 / z_2 z'_4$.

Sia lo schema di fig. 22 che quello di fig. 23, tuttavia, non soddisfano ad un'altra esigenza connessa all'utilizzo di un cambio di velocità, in particolare se questo è destinato alla trasmissione di un autoveicolo: quella di poter cambiare il rapporto di trasmissione utilizzato mentre gli alberi, movente e cedente sono in rotazione.

E' chiaro che il problema sta nel fatto che, poiché a diversi rapporti di trasmissione corrispondono velocità angolari diverse dell'albero di uscita, le velocità periferiche delle ruote montate su di esso saranno pure diverse essendo diverso il loro raggio di primitiva: sarà quindi abbastanza improbabile che, nel passaggio da un imbocco all'altro, i denti della ruota movente trovino il loro posto nei vani della cedente e ciò, inevitabilmente, dà luogo ad urti fra i denti (*grattata*) con conseguente usura,

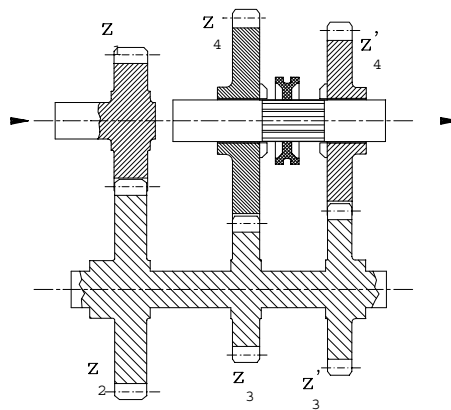


Figura 24

più o meno importante, degli stessi.

La fig. 24 mostra lo schema di funzionamento di un cambio sincronizzato che si prefigge appunto lo scopo di evitare tale inconveniente. In esso, si vede, le ruote che devono realizzare i diversi rapporti di trasmissione sono tutte sempre in presa: quelle che sono montate sull'albero di uscita sono però montate folli sullo stesso, di modo che esse, di per sé, non sono in grado di porlo in rotazione. D'altra parte un tratto dell'albero di uscita è realizzato come albero scanalato e su questo può scorrere l'anello del sincronizzatore il quale, spostato a destra o a sinistra realizza il collegamento fra l'albero ed una delle due ruote folli. Il collegamento fra la ruota folle e l'anello del sincronizzatore avviene per mezzo di particolari risalti, ricavati su una faccia della ruota, che trovano sulla faccia dell'anello i corrispondenti vani e che sono sagomati in modo tale che la rotazione stessa favorisca la presa. Tale tipo di collegamento ha subito ovviamente nel tempo la sua evoluzione per cui esistono anche modi diversi per ottenere il medesimo risultato.

§ 7.- Rotismi epicicloidali.

Come si è già detto nel § precedente, un rotismo viene detto epicicloidale quando almeno uno degli assi sia in moto durante il funzionamento.

Il membro che consente il moto di tale asse prende il nome di *portatre-no* e *satelliti* vengono dette le ruote calettate su di esso.

Un siffatto meccanismo non ha più un grado di libertà, ma avrà un numero di gradi di libertà in più pari al numero degli assi mobili del sistema.

Uno dei modi più semplici in cui può essere realizzato un rotismo epicicloidale è rappresentato in fig.25, in cui i satelliti sono quelli a cui si fa riferimento con i pedici 2 e 3; se una delle ruote che imboccano con i satelliti, è a dentatura interna (fig.26), ad essa si dà il nome di *corona*, diversamente prende il nome di *solare*.

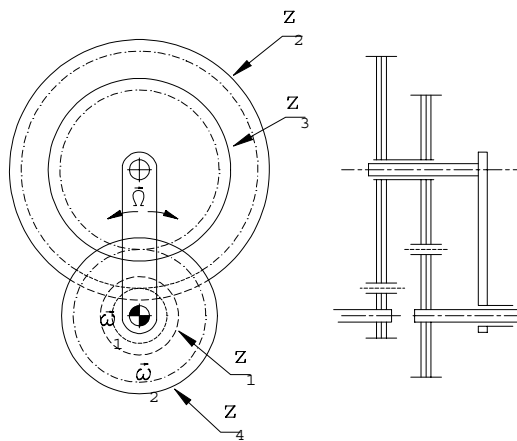


Figura 25

Le velocità angolari caratteristiche sono quella della prima ruota, ω_1 , quella dell'ultima ruota, ω_2 , e quella del braccio portatreno, Ω . Si comprende che tale meccanismo ha due gradi di libertà, e che pertanto potrà essere utilizzato come *sommatore* se fatto funzionare con due moventi ed un cedente, o come *differenziale* se sarà fatto funzionare con un movente e due cedenti.

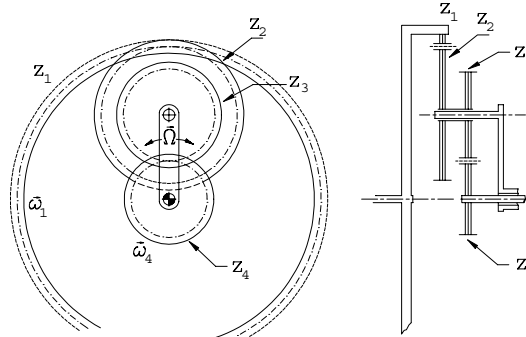


Figura 26

In ogni caso, dal punto di vista cinematico, il suo moto non potrà essere univocamente definito se non imponendo il valore di una delle tre velocità angolari, oltre a stabilire la funzione di ciascun membro (movente o cedente).

Si può ancora osservare che qualora venga imposto proprio il valore $\Omega=0$, il rotismo tornerebbe ad essere un rotismo ordinario.

Lo studio cinematico di un rotismo epicicloidale, ossia la determinazione del suo rapporto di trasmissione, diventa semplice se si pone mente al fatto che il suo modo di funzionare non può essere alterato da un cambiamento di riferimento, e quindi se la misura delle velocità in gioco viene fatta in un riferimento mobile anziché in quello fisso i moti fra le ruote che lo compongono restano inalterati.

Se si sceglie allora come nuovo riferimento proprio il braccio portatreno, le nuove velocità angolari saranno $(\omega_1 - \Omega)$ per la prima ruota, $(\omega_2 - \Omega)$ per l'ultima ruota, $(\Omega - \Omega) = 0$ per il portatreno che risulterà fermo. Si ottiene così quello che prende il nome di *rotismo ordinario corrispondente*.

E' lecito allora scrivere:

$$k = \frac{\omega_2 - \Omega}{\omega_1 - \Omega} = \pm \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} \quad (178)$$

Questo viene chiamato *rapporto costruttivo* (o rapporto di Willis) e consente di legare agevolmente il rapporto fra il numero dei denti delle ruote che compongono il rotismo alle velocità angolari in gioco.

E' importante notare, nella (178), la presenza del *doppio segno*: sta ad indicare che il valore di k potrà essere positivo o negativo. Il cambio di riferimento, che si ottiene, come visto, sovrapponendo a tutto il sistema una velocità eguale e contraria a quella del braccio portatreno, potrebbe avere come effetto, a seconda dei casi, una inversione del segno di una

delle ω , e di ciò deve tenersi conto con il segno da attribuire al parametro k . In altre parole, nel passaggio dal rotismo epicicloidale al rotismo ordinario corrispondente se una delle due differenze che compaiono nella (178) diventa negativa, k sarà negativo. La valutazione di tale circostanza è semplice: basterà immaginare fermo il braccio portatreno e valutare se, assegnando ad arbitrio un verso di rotazione alla prima ruota, risulta per l'ultima ruota un verso concorde o discorde con la prima; se i versi sono concordi il segno sarà positivo, sarà negativo nel caso opposto.

Definito il valore assunto da k , e noto quali siano gli alberi moventi e quali i cedenti, è possibile ricavare dalla stessa (178) l'espressione del rapporto di trasmissione che il rotismo epicicloidale realizza. Infatti sviluppando si ha:

$$\Omega = \frac{k}{k-1} \omega_1 - \frac{1}{k-1} \omega_2$$

e da questa, quindi, uno dei tre rapporti:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{\omega_2}{\omega_1} = k - (k-1) \frac{\Omega}{\omega_1} \\ \tau_2 &= \frac{\Omega}{\omega_1} = \frac{k}{k-1} - \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{1}{k-1} \\ \tau_3 &= \frac{\Omega}{\omega_2} = \frac{k}{k-1} \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{1}{k-1} \end{aligned} \quad (179)$$

oppure i tre inversi, se si scambiano le funzioni di ingresso ed uscita. Si comprende, allora, la grande versatilità di questo tipo di rotismi: con lo stesso valore di k , ossia con le stesse ruote, possono essere ottenuti rapporti di trasmissione diversi con la sola scelta delle funzioni da assegnare agli assi.

§ 8.- Applicazioni.

Consideriamo il rotismo di fig.27 costituito dalle quattro ruote con numeri di denti z_1, z_2, z_3, z_4 , in cui la ruota 1 è solidale al telaio, mentre la 2 e la 3, solidali fra loro, sono i satelliti calettati sul braccio portatreno.

E' la disposizione del **rotismo di Pickering** o rotismo per contagiri.

Calcoliamo il rapporto di trasmissione nella ipotesi in cui sia movente il braccio portatreno e cedente la ruota 4, ossia il valore di $\tau = \omega_4 / \Omega$.

Il rapporto costruttivo vale:

RUOTE DENTATE E ROTISMI

$$k = \frac{\omega_4 - \Omega}{\omega_1 - \Omega} = \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} \quad (180)$$

ed è positivo in quanto, a portatreno fermo, ad una rotazione della ruota 1, corrisponderebbe una rotazione dello stesso verso della ruota 4 (2 imbecchi esterni).

Ora, con le ipotesi fatte sulla funzione degli alberi, e tenendo conto che in questo caso è $\omega_1=0$, il rapporto di trasmissione sarà dato dalla stessa (180), di cui il valore di k è stato già calcolato, ed in cui dobbiamo porre, appunto, $\omega_1=0$.

Avremo allora:

$$k = \frac{\omega_4 - \Omega}{-\Omega} = 1 - \frac{\omega_4}{\Omega}$$

e quindi, tenendo conto della (180),:

$$\tau = \frac{\omega_4}{\Omega} = 1 - k = \frac{z_2 z_4 - z_1 z_3}{z_2 z_4} \quad (181)$$

Si può subito osservare che è facile che la differenza a numeratore risulti molto piccola a fronte del denominatore: il rotismo risulterà quindi fortemente riduttore.

Se si avesse $z_1=65$, $z_2=85$, $z_3=80$, e $z_4=70$, si avrebbe $k=520/595$ e $\tau=75/595$ ossia $\tau \approx 0,126 \approx 1/8$.

Un altro tipo di rotismo epicycloidale, di impiego aeronautico, è quello di cui allo schema di fig.28. Rappresenta il **riduttore Farmann**, costituito da tre ruote coniche, in cui la ruota 3 è solidale al telaio, è movente la

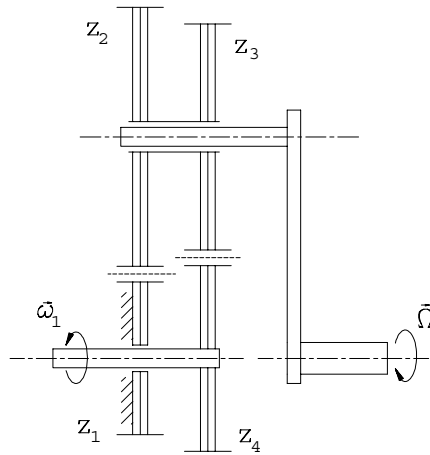


Figura 27

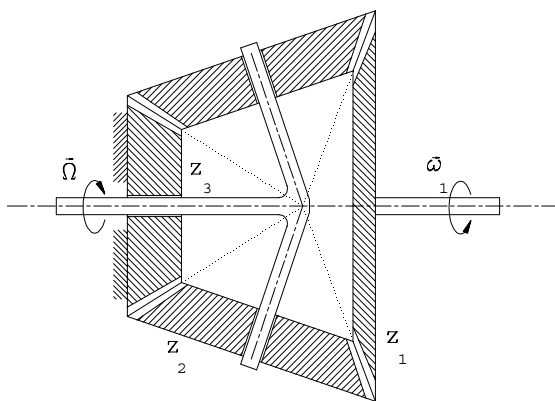


Figura 28

ruota 1, cedente il portatreno.

In questo caso sarà:

$$k = \frac{\omega_3 - \Omega}{\omega_1 - \Omega} = -\frac{z_1}{z_3} \quad (182)$$

Non compare il numero di denti della ruota 2 perché nel rotismo ordinario corrispondente essa è una intermedia oziosa, ed il rapporto è negativo in quanto, in quella condizione, risultano di verso opposto le rotazioni della ruota 1 e della ruota 3 (è vero che vi sono due imbrocchi esterni ma la disposizione delle ruote coniche dà luogo ad una rotazione di π del vettore ω_3).

Tenendo conto che $\omega_3=0$, il rapporto di trasmissione sarà dato da:

$$\tau = \frac{\Omega}{\omega_1} = \frac{k}{k-1} = \frac{z_1}{z_1+z_3} \quad (183)$$

Se $z_1=300$ e $z_3=60$ sarà $k = -0.2$ e quindi $\tau = 0.2/1.21 \approx 0,17$. La forma che questo rotismo assume globalmente, in questa versione o anche in versioni con più satelliti, è il motivo per cui veniva utilizzato in campo aeronautico.

Il **differenziale per autoveicoli** (fig.29), è costituito anch'esso da quattro ruote coniche, ma a due a due uguali. Due di esse, la 2 e la 4, fungono da satelliti e come tali sono calettate al portatreno che è, l'elemento motore del meccanismo; le altre due, la 1 e la 3, sono calettate agli alberi (i semiassi) su cui, all'estremità opposta, sono poi calettati i mozzi delle ruote.

In tali condizioni il meccanismo ha di fatto due gradi di libertà e quindi, indicando con ω_s la velocità angolare della ruota 1 e con ω_d quella della ruota 3, la relazione fra le velocità angolari si scriverà come:

$$\Omega = \frac{k}{k-1} \omega_s - \frac{1}{k-1} \omega_d \quad (184)$$

D'altra parte, l'uguaglianza delle ruote 1 e 3 implica che il rapporto costruttivo del differenziale è:

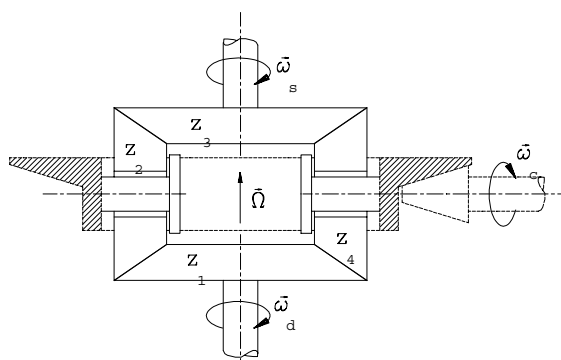


Figura 29

$$k = \frac{\omega_s - \Omega}{\omega_d - \Omega} = -\frac{z_3}{z_d} = -1 \quad (185)$$

Ne discende che dalla (184) risulta la relazione cinematica:

$$\Omega = \frac{1}{2}\omega_s + \frac{1}{2}\omega_d = \frac{\omega_s + \omega_d}{2} \quad (186)$$

il che significa che la velocità angolare del portatreno sarà sempre la media delle velocità angolari degli alberi di uscita.

In particolare, se $\omega_s = \omega_d = \omega$ (marcia in rettilineo), sarà $\Omega = \omega$; la stessa condizione implica che non vi sarà alcuna rotazione dei satelliti intorno al proprio asse di calettamento: i punti simmetrici delle ruote 2 e 4, a contatto con le ruote adiacenti 1 e 3, avranno, infatti, la medesima velocità.

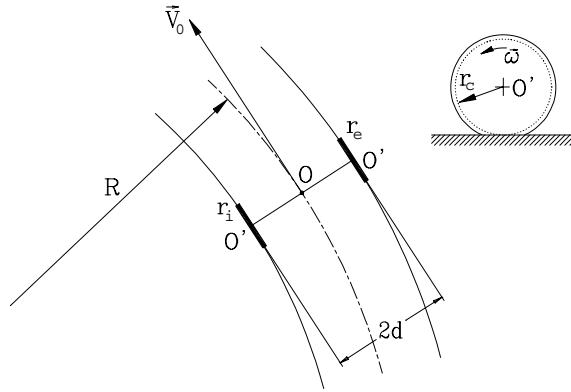


Figura 30

Consideriamo ora (fig.30), un veicolo la cui carreggiata sia $2d$, le cui ruote abbiano un raggio sotto carico pari ad r_c , e che stia percorrendo con velocità V_0 una traiettoria di cui sia R il raggio di curvatura.

I centri delle ruote percorreranno le loro traiettorie con velocità, rispettivamente per la ruota interna e per l'esterna:

$$V_i = \frac{V_0}{R}(R-d)$$

$$V_e = \frac{V_0}{R}(R+d)$$

per cui le velocità angolari delle stesse ruote, ipotizzando che rotolino senza strisciare, saranno:

$$\omega_s = \frac{V_i}{r_c} = \frac{V_0}{r_c R}(R-d) \quad \omega_d = \frac{V_e}{r_c} = \frac{V_0}{r_c R}(R+d)$$

La (186) si scriverà allora:

$$\Omega = \frac{\omega_s + \omega_d}{2} = \frac{V_0}{2r_c R}(R-d + R+d) = \frac{V_0}{r_c} \quad (187)$$

e ciò mostra da un canto che la larghezza della carreggiata del veicolo non ha gioco nel funzionamento del differenziale, e dall'altro che il legame fra la velocità di avanzamento del veicolo V_0 , e la velocità angolare del portatreno dipende esclusivamente dal raggio sotto carico delle ruote.

Consideriamo ancora che, dal punto di vista dinamico, in assenza di perdite, deve valere il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{\omega_s + \omega_d}{2} \\ C_m \Omega - C_s \omega_s - C_d \omega_d &= 0 \\ C_m - C_s - C_d &= 0\end{aligned}\quad (188)$$

in cui compaiono le coppie resistenti C_s e C_d agenti rispettivamente sul semiasse interno, sul semiasse esterno e la coppia motrice C_m agente sul portatreno; la seconda equazione rappresenta l'equilibrio delle potenze in assenza di perdite, la terza l'equilibrio delle coppie.

Risolvendo il sistema (188) si ottiene dapprima:

$$\begin{aligned}C_m(\omega_s + \omega_d) - 2C_s \omega_s - 2C_d \omega_d &= 0 \\ C_m &= C_s + C_d\end{aligned}$$

e poi:

$$2C_s \omega_s + 2C_d \omega_d - (C_s + C_d)(\omega_s + \omega_d) = 0$$

da cui:

$$(C_s - C_d)(\omega_d - \omega_s) = 0 \quad (189)$$

Si vede allora che anche quando le velocità angolari delle ruote siano diseguali, dovendo essere necessariamente verificata la (189), dovranno essere eguali le coppie alle ruote, mentre quando le velocità angolari delle ruote sono eguali le coppie resistenti alle ruote possono anche essere diverse.

Ciò implica che se $\Omega \neq 0$ mentre, per es., è nulla sia ω_s che C_d , si avrà dalla prima delle (188) che è $\omega_d \neq 0$; ed allora, essendo $\omega_d \neq \omega_s$, sarà, per la (189), $C_s = C_d = 0$ con la conseguente impossibilità di far avanzare il veicolo.